FISICA CUANTICA II

CONTROL DE MAYO, PROBLEMAS

CURSO 2023/2024 16 de Mayo de 2024

Los números entre corchetes indican el valor de cada apartado. Este examen cuenta un 75% de la nota.

1[3].- Un sistema esta formado por una particula de espin 1/2 y un oscilador armonico unidimensional. Su vector de estado es:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle \otimes |\alpha\rangle + i|-\rangle \otimes |\beta\rangle\right) ,$$

siendo $|\pm\rangle$ los estados de la particula de espin 1/2 tales que $\sigma_z|\pm\rangle = \pm|\pm\rangle$ y $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ los siguientes vectores de estado del oscilador:

$$|\alpha\rangle = \sqrt{3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}|n\rangle , \qquad |\beta\rangle = 2\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}}|n\rangle .$$

a) Obtengase la matriz densidad reducida para la particula de espin 1/2.

b) Obtengase la pureza y el vector de Bloch de la matriz densidad obtenida en el apartado anterior.

2[4]. Dos particulas de espin 1/2 interaccionan a traves del hamiltoniano:

$$H = \hbar g\, \sigma_z \otimes \sigma_x ,$$

siendo g una constante real. En el instante inicial $t = 0$ el estado del sistema es:

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|+,+\rangle + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|-,-\rangle ,$$

donde $|s, s'\rangle = |s\rangle \otimes |s'\rangle$ para $s, s' = \pm$ y $\sigma_z|s\rangle = s|s\rangle$. Transcurrido un tiempo $t > 0$ se mide σ_z sobre el primer espin y se obtiene el valor $+1$.

a) Si inmediatamente despues de esta primera medida se mide σ_x para el segundo espin, ¿Que valores se pueden obtener y con que probabilidades?.

b) Supongase que inmediatamente despues de medir σ_z en el primer espin en el instante de tiempo $t > 0$ y obtener $+1$ como resultado se mide σ_z en el segundo espin. ¿Cual sera el valor medio de los resultados obtenidos?. ¿Para que valores de $t > 0$ este valor medio es maximo?.

3[3].- Una particula de espin 2 tiene por hamiltoniano:

$$H = \frac{\omega}{\hbar}\, S_+ S_- ,$$

siendo ω una constante y $S_\pm = S_1 \pm iS_2$ los operadores escalera del algebra del momento angular de espin de la particula. Obtenganse los niveles de energia del sistema y su degeneracion.

Un sistema esta formado por una particula de espin 1/2 y un oscilador armonico unidimensional. Su vector de estado es:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle \otimes |\alpha\rangle + i|-\rangle \otimes |\beta\rangle\right)$$

siendo $|\pm\rangle$ los estados de la particula de espin 1/2 tales que $\sigma_z|\pm\rangle = \pm|\pm\rangle$ y $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ los siguientes vectores de estado de los osciladores

$$|\alpha\rangle = \sqrt{3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}|n\rangle \quad , \quad |\beta\rangle = 2\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}}|n\rangle$$

siendo $|n\rangle$ el n-esimo autoestado del hamiltoniano del oscilador.

a) Obtengase la matriz densidad reducida para la particula de espin 1/2

b) Obtenganse la pureza y el vector de Bloch de la matriz obtenida en el apartado anterior

---

a) Comprobemos las normalizaciones de $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$:

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = 3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2n+2}} = \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n} =$$

$$= \frac{3}{4}\,\frac{1}{1-1/4} = 3/4\,\frac{1}{3/4} = 1 \longrightarrow \text{ok!}$$

③

$$\langle\beta|\beta\rangle = 8\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{2n+2}} = \frac{8}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{9^n} =$$

$$= \frac{8}{9}\,\frac{1}{1-1/9} = \frac{8}{9}\,\frac{1}{8/9} = 1$$

Calculemos tambien el producto $\langle\beta|\alpha\rangle$:

$$\langle\beta|\alpha\rangle = \sqrt{3}\;2\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{6^{n+1}} = 2\sqrt{6}\,\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{6^n} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{6}}\,\frac{1}{1-\frac{1}{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}}\,\frac{1}{5/6} = \frac{2\sqrt{6}}{5} \Rightarrow$$

$$\boxed{\langle\beta|\alpha\rangle = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{3}}{5}}$$

Escribamos $|\psi\rangle\langle\psi|$:

$$|\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2}\Big[|+\rangle\otimes|\alpha\rangle + i|-\rangle\otimes|\beta\rangle\Big]\cdot$$

$$\Big[\langle+|\otimes\langle\alpha| - i\langle-|\otimes\langle\beta|\Big] =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\big(|+\rangle\otimes|\alpha\rangle\big)\big(\langle+|\otimes\langle\alpha|\big)}_{(1)} - \underbrace{\frac{i}{2}\big(|+\rangle\otimes|\alpha\rangle\big)\big(\langle-|\otimes\langle\beta|\big)}_{(2)}$$

$$+ \underbrace{\frac{i}{2}\big(|-\rangle\otimes|\beta\rangle\big)\big(\langle+|\otimes\langle\alpha|\big)}_{(3)} + \underbrace{\frac{1}{2}\big(|-\rangle\otimes|\beta\rangle\big)\big(\langle-|\otimes\langle\beta|\big)}_{(4)}$$

Tenemos que calcular $Tr_2(|\psi\rangle\langle\psi|)$

$$\Rightarrow Tr_2\,(1) = \frac{1}{2}\underbrace{\langle\alpha|\alpha\rangle}_{1}|+\rangle\langle+| = \boxed{\frac{1}{2}|+\rangle\langle+|}$$

$$\Rightarrow Tr_2(2) = -\frac{i}{2}\langle\beta|\alpha\rangle |+\rangle\langle -| = -\frac{i}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}\sqrt{2}\sqrt{3}}{5}|+\rangle\langle -| =$$

$$= \boxed{-i\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{5}|+\rangle\langle -|}$$

$$\Rightarrow Tr_2(3) = \frac{i}{2}\langle\alpha|\beta\rangle |-\rangle\langle +| = \boxed{\frac{i\sqrt{2}\sqrt{3}}{5}|-\rangle\langle +|}$$

$$\Rightarrow Tr_2(4) = \frac{1}{2}\underbrace{\langle\beta|\beta\rangle}_{1} |-\rangle\langle -| = \boxed{\frac{1}{2}|-\rangle\langle -|}$$

Entonces

$$\rho = Tr_2(|\psi\rangle\langle\psi|) \Rightarrow$$

$$\boxed{\rho = \frac{1}{2}|+\rangle\langle +| + \frac{1}{2}|-\rangle\langle -| - \frac{i\sqrt{6}}{5}|+\rangle\langle -| + \frac{i\sqrt{6}}{5}|-\rangle\langle +|}$$

En forma de matriz

$$\rho = \begin{pmatrix} 1/2 & -\frac{i\sqrt{6}}{5} \\ \frac{i\sqrt{6}}{5} & 1/2 \end{pmatrix}$$

b) Calculemos ρ^2

$$\rho^2 = \begin{pmatrix} 1/2 & -\frac{i\sqrt{6}}{5} \\ \frac{i\sqrt{6}}{5} & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & -\frac{i\sqrt{6}}{5} \\ i\sqrt{6}/5 & 1/2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/4 + 6/25 & - \\ - & \frac{6}{25} + 1/4 \end{pmatrix}$$

$$Tr(\rho^2) = 2\left(\frac{1}{4} + \frac{6}{25}\right) = \frac{1}{2} + \frac{12}{25} =$$

$$= \frac{25+24}{50} \Rightarrow \boxed{Tr(\rho^2) = \frac{49}{50}}$$

$Tr\,\rho^2 < 1$, como debería ser.

<u>Componentes del vector de Bloch</u>

$$b_z = 0 \qquad \frac{+i\, b_y}{2} = +i\frac{\sqrt{6}}{5} \Rightarrow \boxed{b_y = \frac{2\sqrt{6}}{5}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{b} = \left(0, \frac{2\sqrt{6}}{5}, 0\right)}$$

Obsérvese que $|\vec{b}| = \frac{2\sqrt{6}}{5} \simeq 0.979$

Dos particulas de espin ½ interaccionan a traves del hamiltoniano

$$H = \hbar g\, \sigma_z \otimes \sigma_x$$

siendo g una constante real. En el instante inicial $t=0$ el estado del sistema es

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|+,+\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\,|-,-\rangle$$

donde $|s,s'\rangle = |s\rangle \otimes |s'\rangle$ para $s,s' = \pm$ y $\sigma_z|s\rangle = s|s\rangle$. Transcurrido un tiempo $t>0$ se mide σ_z sobre el primer espin y se obtiene un valor $+1$.

a) Si inmediatamente despues de esta primera medida se mide σ_x para el segundo espin, ¿Que valores se pueden obtener y con que probabilidades?

b) Supongase que despues de medir σ_z en el primer espin en el instante de tiempo $t>0$ y obtener $+1$ como resultado se mide σ_z en el segundo espin. ¿Cual seria el valor medio de los resultados obtenidos?. ¿Para que valores de $t>0$ este valor medio es maximo?

Obtengamos el operador de evolucion temporal

$$U(t) = e^{-i/\hbar\, Ht} = e^{-igt\, \sigma_z \otimes \sigma_x}$$

Como

$$(\sigma_z \otimes \sigma_x)^{2n} = 1 \qquad (\sigma_z \otimes \sigma_x)^{2n+1} = \sigma_z \otimes \sigma_x$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{U(t) = \cos(gt) - i\,\mathrm{sen}(gt)\,\sigma_z \otimes \sigma_x}$$

El vector de estado para $t>0$ es:

$$|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi(0)\rangle = \cos(gt)|\psi(0)\rangle - i\,\mathrm{sen}(gt)\times$$
$$\times\, \sigma_z \otimes \sigma_x |\psi(0)\rangle$$

Pero

$$\sigma_z \otimes \sigma_x |+,+\rangle = |+,-\rangle$$

$$\sigma_z \otimes \sigma_x |-,-\rangle = -|-,+\rangle$$

Entonces

$$\sigma_z \otimes \sigma_x |\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|+,-\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|-,+\rangle \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} |\psi(t)\rangle = {} & \frac{\cos(gt)}{\sqrt{3}}|+,+\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\cos(gt)|-,-\rangle \\ & - \frac{i\,\mathrm{sen}(gt)}{\sqrt{3}}|+,-\rangle + i\sqrt{\frac{2}{3}}\,\mathrm{sen}(gt)|-,+\rangle \end{aligned}}$$

El estado reducido despues de medir σ_z y obtener +1 en el primer espin es:

$$|\psi_{red}(t)\rangle = \frac{N}{\sqrt{3}}\left(\cos(gt)|+,+\rangle - i\,\text{sen}(gt)\,|+,-\rangle\right)$$

Normalizando $\Rightarrow$ $N=\sqrt{3}$ $\Rightarrow$

$$\boxed{|\psi_{red}(t)\rangle = \cos(gt)|+,+\rangle - i\,\text{sen}(gt)|+,-\rangle}$$

a) Los autovectores de σ_x son:

$$|+x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle)$$

$$|-x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - |-\rangle)$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+x\rangle + |-x\rangle)}$$

$$\boxed{|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+x\rangle - |-x\rangle)}$$

Entonces

$$|+,+\rangle = |+\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|+x\rangle + |-x\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+,+x\rangle + |+,-x\rangle)$$

$$|+,-\rangle = |+\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|+x\rangle - |-x\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+,+x\rangle - |+,-x\rangle)$$

$\Rightarrow$

$$|\psi_{red}(t)\rangle = \frac{\cos(gt)}{\sqrt{2}}(|+,+x\rangle + |+,-x\rangle)$$

$$- \frac{i\,\text{sen}(gt)}{\sqrt{2}}(|+,+x\rangle - |+,-x\rangle) =$$

$$= \frac{\cos(gt) - i\,\text{sen}(gt)}{\sqrt{2}}|+,+x\rangle + \frac{\cos(gt) + i\,\text{sen}(gt)}{\sqrt{2}}|+,-x\rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{|\psi_{red}(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-igt} |+,+x\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{igt} |+,-x\rangle}$$

Entonces

$$\boxed{\text{Prob}(\sigma_x = +1) = \frac{1}{2}} \quad \boxed{\text{Prob}(\sigma_x = -1) = \frac{1}{2}}$$

b) Como $|\psi_{red}(t)\rangle = \cos(gt)|+,+\rangle - i\,\text{sen}(gt)\,|+,-\rangle \Rightarrow$

$$\boxed{\text{Prob}(\sigma_z = 1) = \cos^2(gt)} \quad \boxed{\text{Prob}(\sigma_z = -1) = \text{sen}^2(gt)}$$

$$\langle \sigma_z \rangle = \cos^2(gt) - \text{sen}^2(gt) = \cos(2gt)$$

$$\boxed{\langle \sigma_z \rangle = \cos(2gt)}$$

(Tambien se puede obtener como
$$\langle \sigma_z \rangle = \langle \psi_{red} | 1 \otimes \sigma_z | \psi_{red} \rangle \;)$$

$\langle \sigma_z \rangle$ es maximo cuando $t = t_n \,/\, \cos(2gt_n) = 1$

$$\Rightarrow \quad 2gt_n = 2\pi n \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_n = \frac{\pi}{g} n} \qquad n = 0, 1, 2 \ldots$$

Observemos que

$$|\psi_{red}(t_n)\rangle = (-1)^n \, |+,+\rangle$$

20

Una partícula de espín 2 tiene por hamiltoniano

$$H = \frac{\omega}{\hbar} S_+ S_-$$

siendo ω una constante y $S_\pm = S_1 \pm i S_2$ los operadores escalera del álgebra del momento angular de espín de la partícula. Obténganse los niveles de energía y sus degeneraciones.

$$S_+ S_- = (S_1 + iS_2)(S_1 - iS_2) = S_1^2 + S_2^2 - i(S_1 S_2 - S_2 S_1) =$$

$$= \underbrace{S_1^2 + S_2^2}_{\vec{S}^2 - S_3^2} - i \underbrace{[S_1, S_2]}_{i\hbar S_3} \Rightarrow$$

$$\boxed{S_+ S_- = \vec{S}^2 - S_3^2 + \hbar S_3} \Rightarrow$$

$$H = \frac{\omega}{\hbar} S_+ S_- = \frac{\omega}{\hbar}\left(S^2 - S_3^2 + \hbar S_3\right)$$

$\Rightarrow$ H es diagonal en los estados $|s, m\rangle$

$$S^2 |s, m\rangle = \hbar^2 s(s+1) |s, m\rangle$$

$$S_3 |s, m\rangle = \hbar m |s, m\rangle \Rightarrow S_3^2 = \hbar^2 m^2 |s, m\rangle$$

$\Rightarrow$

$$H |s, m\rangle = \frac{\omega}{\hbar} \hbar^2 \left(s(s+1) - m^2 + m\right) |s, m\rangle$$

$$\boxed{H|s,m\rangle = E_{s,m}\,|s,m\rangle} \quad -s \leq m \leq +s$$

$$\boxed{E_{s,m} = \hbar\omega\left(s(s+1) - m(m-1)\right)}$$

En nuestro caso $s=2 \Rightarrow m = -2, -1, 0, +1, +2$

$\Rightarrow$ Tenemos un espacio de Hilbert de dimensión 5.

$$E_m = \hbar\omega\left[2(2+1) - m(m-1)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{E_m = \hbar\omega\left[6 - m(m-1)\right]}$$

$\boxed{m=-2}$ $\quad E_{-2} = \hbar\omega\left[6-(-2)(-2-1)\right] = \hbar\omega(6-6) = 0$

$$\boxed{E_{-2} = 0}$$

$\boxed{m=-1}$ $\quad \Rightarrow m(m-1) = -1(-1-1) = 2$

$$E_{-1} = \hbar\omega(6-2) \quad \Rightarrow \boxed{E_{-1} = 4\hbar\omega}$$

$\boxed{m=0}$ $\quad m(m-1) = 0 \quad \Rightarrow \boxed{E_0 = 6\hbar\omega}$

$\boxed{m=1}$ $\quad m(m-1) = 0 \quad \Rightarrow \boxed{E_1 = 6\hbar\omega}$

$\boxed{m=2}$ $\quad m(m-1) = 2(2-1) = 2 \Rightarrow \boxed{E_2 = 4\hbar\omega}$

Entonces tenemos los niveles

$$E=0 \rightarrow \text{singlete} \longleftarrow m=-2$$

$$E=4\hbar\omega \rightarrow \text{doblete} \longleftarrow m=-1,2$$

$$E=6\hbar\omega \rightarrow \text{doblete} \longleftarrow m=0,1$$

Si $\omega>0$